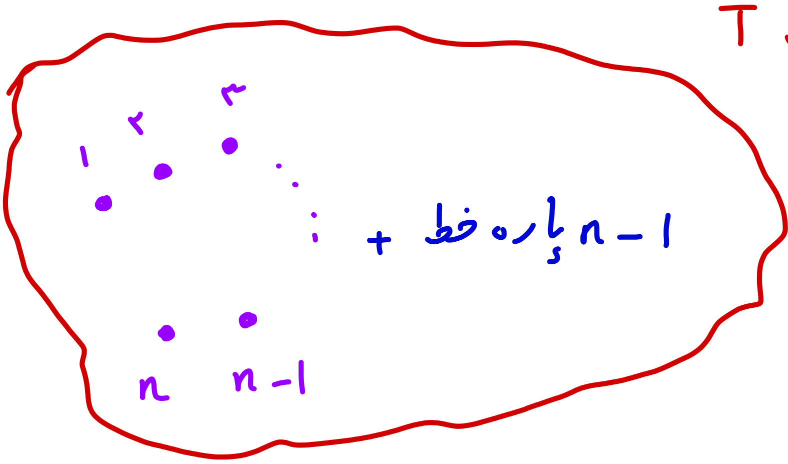
گراف T



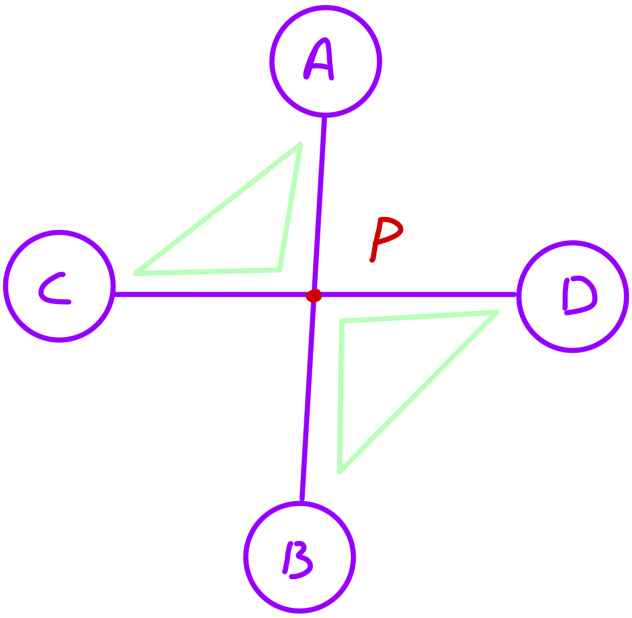
از هر نقطه میتوان به نقطه دیگر رسید ← T همبند است

تعداد یال ها n-1 است ← T درخت است

طول پاره‌خطها کمینه است ← T درخت پوشای کمینه است

اثبات با برهان خلف

فرض می‌کنیم AB و CD همدیگر را قطع می کنند



$$\left.\begin{aligned} AP + CP &> AC \\ PB + PD &> BD \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{AP}+\underbrace{CP}+\underbrace{PB}+\underbrace{PD} > AC+BD$$

$$\Rightarrow AB + CD > AC + BD$$

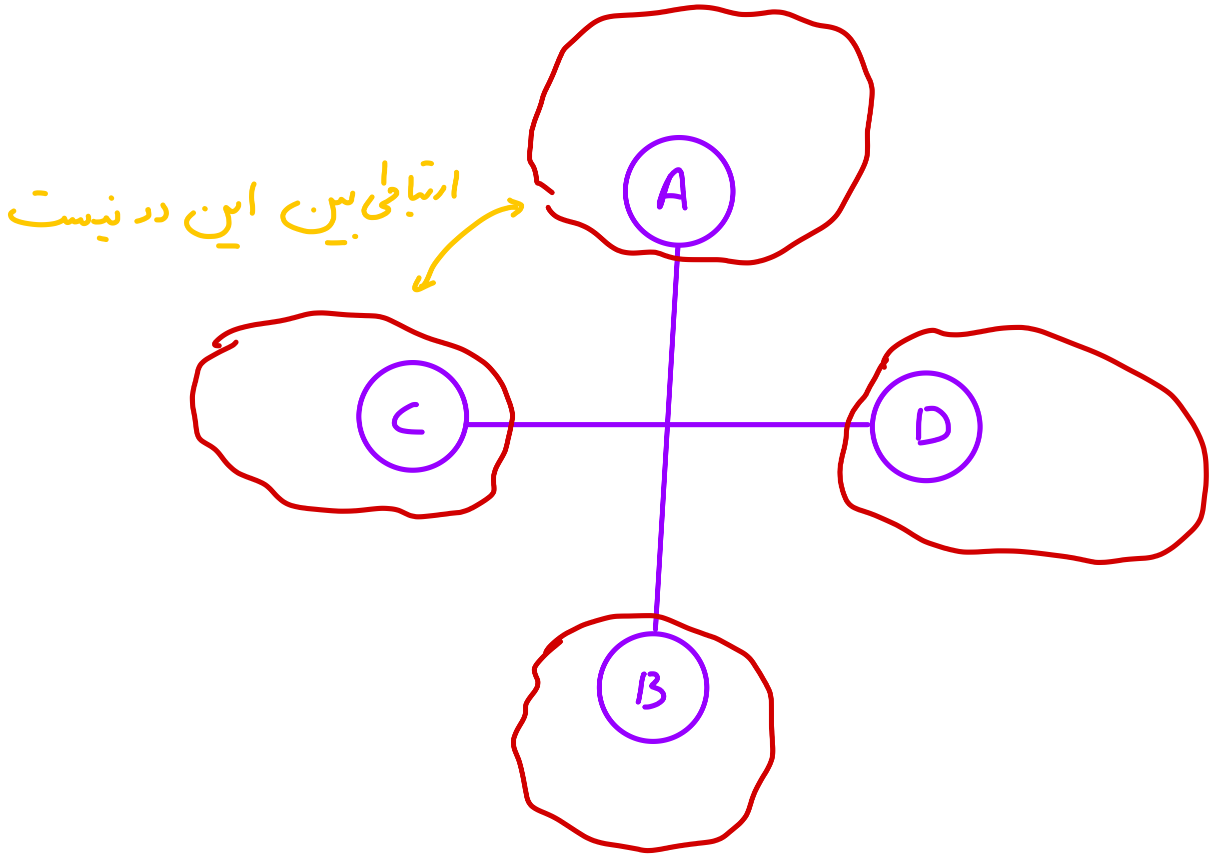
به صورت مشابه می‌توان نشان داد:

$$AB + CD > AD + BC$$

حال دو یال AB و CD را حذف می‌کنیم و به جای آن ها یال های AC و BD را اضافه می‌کنیم گراف جدید $n-1$ یال دارد و همبند است اما جمع طول یال ها کمتر شده و این با کمینه بودن مجموع طول ها تناقض دارد. ※

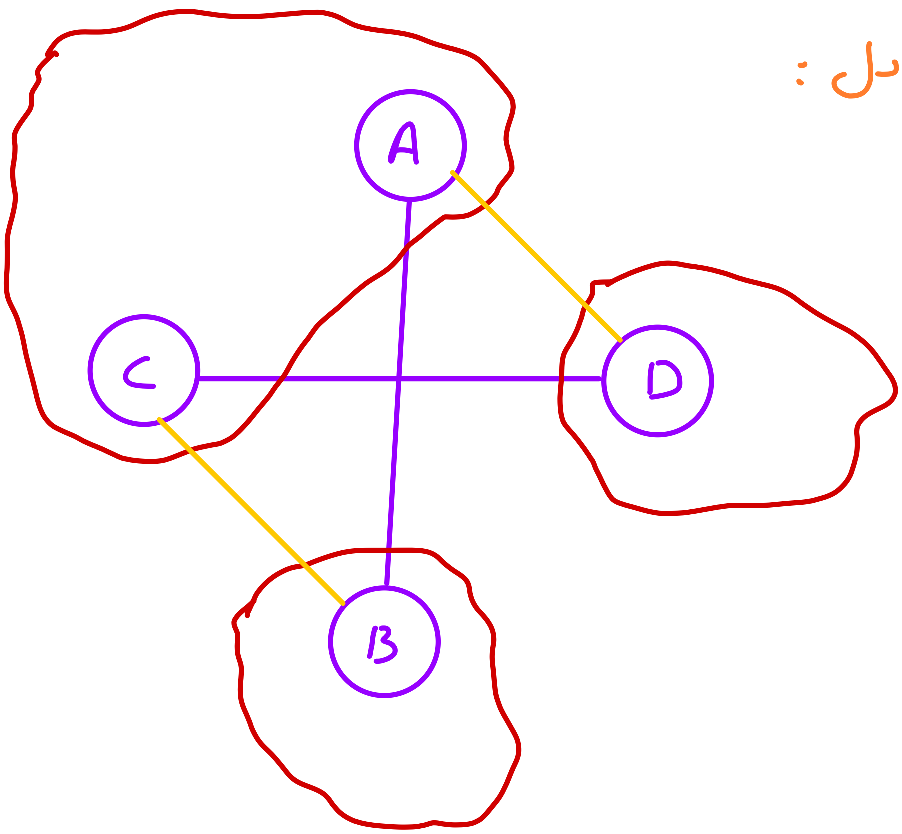
اثبات همبند ماندن گراف :

امکان ندارد هر کدام از A و B و C و D یک مولفه جدا باشند چون آن وقت از A به راس C یا D نمی‌توان رفت :



پس حداقل دو راس در یک مولفه قرار دارند چهار حالت را بررسی می‌کنیم:

حالت اول :

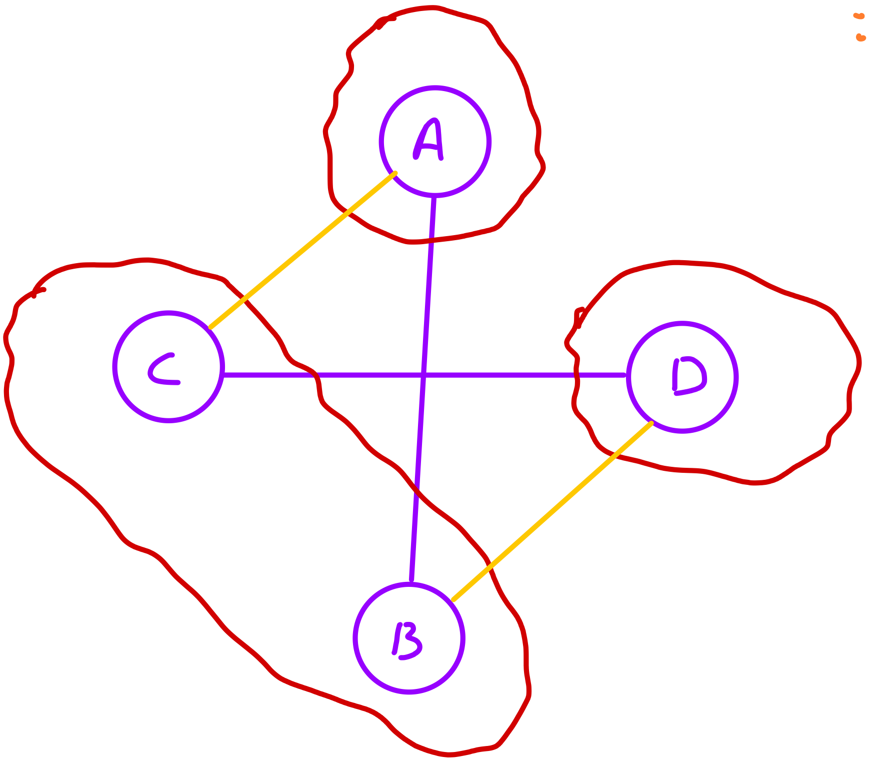


در این حالت می‌توانیم یال‌های AB و CD را با AD و BC

جابجا کنیم و گراف همچنان همبند می‌ماند

$AD + BC < AB + CD$

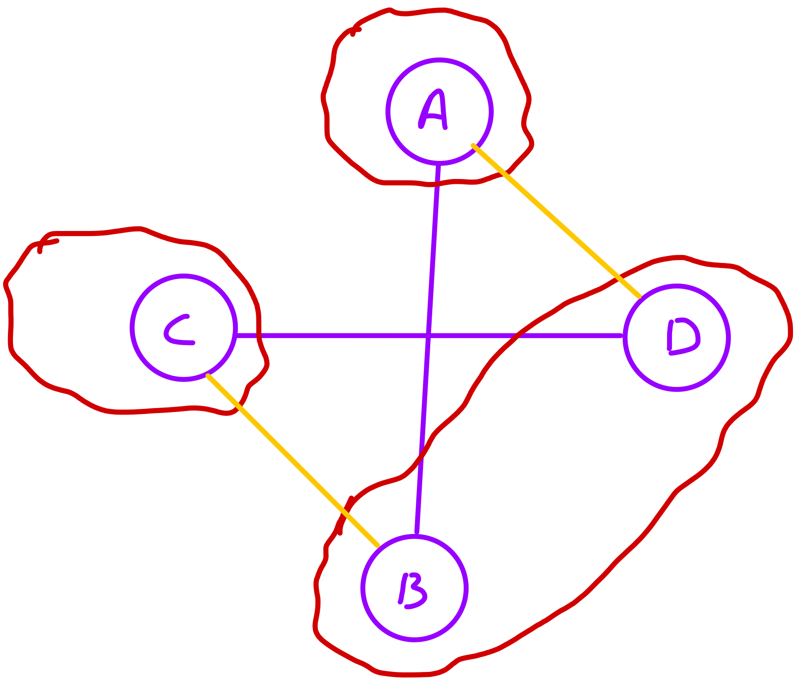
حالت دوم :



در این حالت می‌توانیم یال‌های AB و CD را با AC و BD

جابجا کنیم و گراف همچنان همبند می‌ماند

$AC + BD < AB + CD$

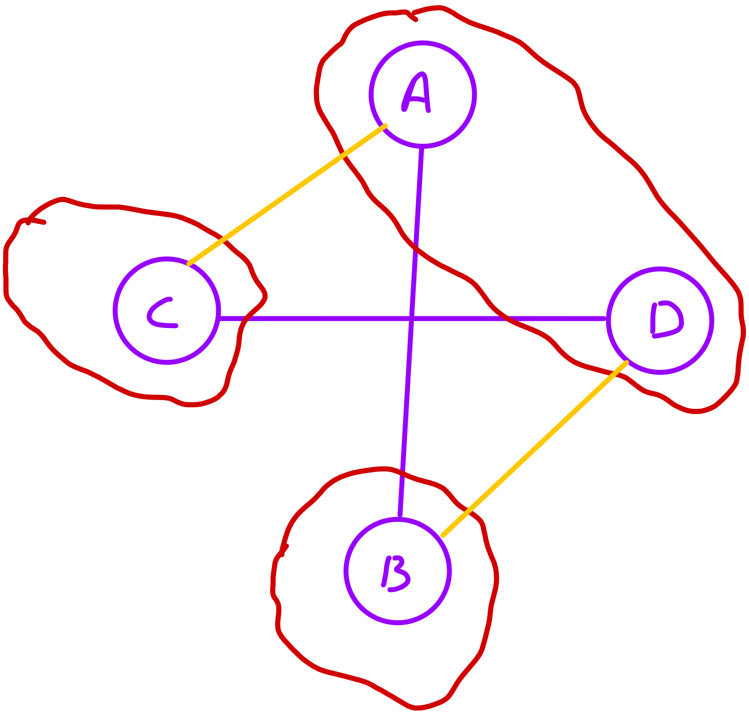


حالت سوم :

در این حالت می‌توانیم یال‌های AB و CD را با AD و BC جایگزین می‌کنیم و گراف همچنان همبند می‌ماند

$$AD + BC < AB + CD$$

حالت چهارم:



در این حالت می‌توانیم یال‌های AB و CD را با AC و BD جایگزین می‌کنیم و گراف همچنان همبند می‌ماند

$$AC + BD < AB + CD$$

پس اثبات کامل شد و در گراف T هیچ دو پاره خط یکدیگر را قطع نمی‌کنند