به نام خدا

سوال ۳۶ – برش بسته

صورت سوال

یک گراف دلخواه با مجموعه رئوس $V(G)$ را در نظر بگیرید. برای دو راس s و t یک برش از این گراف میان این دو راس، معادل افراز $V(G)$ به دو مجموعه S و T است که $s \in S$ و $t \in T$. و در این صورت، با حذف تمام تمام یال‌های از S به T، s و t از هم جدا می‌شوند. در این صورت، اندازه برش برابر است با تعداد یال‌های بین S و T. یک برش کمینه، برشی است که اندازه آن از همه برش‌های دیگر کمتر باشد.

فرض کنید که (S_1, T_1) و (S_2, T_2) دو برش کمینه از گراف باشند، ثابت کنید که $(S_1 \cap S_2, T_1 \cup T_2)$ و $(S_1 \cup S_2, T_1 \cap T_2)$ نیز دو برش کمینه هستند.

* reduce مسئله به مسئله maxflow :

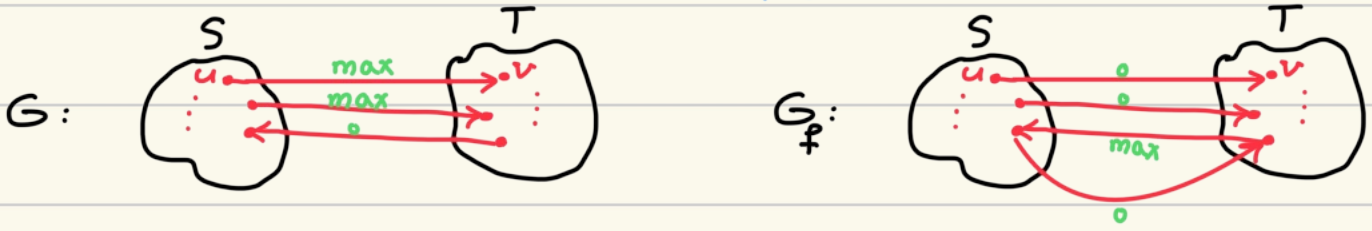
- در این گراف هر یال (u,v) را با دو یال جهت دار (u,v) و (v,u) جایگزین می‌کنیم.
- و به هر یال capacity 1 می‌دهیم.

حالا با این تعریف : مسئله پیدا کردن برش کمینه در گراف بدون جهت اصلی دقیقا معادل پیدا کردن min cut و در نتیجه maxflow از مبدأ s به t در این گراف جهت دار است.

* قضیه : برش (S,T) کمینه است $\Leftrightarrow$ در گراف باقی مانده هیچ یالی از S به T نباشد.

$\Leftarrow$ می دانیم : اندازه mincut با maxflow برابر است : $v(f) = Cap(S,T) = \sum_{e \text{ outs}} c(e)$

$$v(f) = \sum_{e \text{ outs}} f(e) - \sum_{e \text{ in } S} f(e) \xrightarrow{\text{باید}} \begin{cases} \sum_{e \text{ in } S} f(e) = 0 \\ \forall e \text{ out from } S : \ f(e) = c(e) \end{cases}$$



$\forall$ e out from S $\Rightarrow$ $c_{G_f}(e) = 0 \rightarrow f(e) = c(e)$ $\Rightarrow$

$\forall$ e in S $\Rightarrow$ $c_{G_f}(e^R) = 0 \rightarrow f(e) = 0$

$$v(f) = \sum_{e \text{ outs}} f(e) - \sum_{e \text{ in } S} f(e) = \sum_{e \text{ outs}} c(e) - 0 = cap(S,T)$$

چون $f(v) \leq cap(\text{min cut})$ (S,T) یک برش کمینه است. $\leftarrow$ پس قطعاً کات

تضیه اثبات شد ▨

(S_1, T_1) برش کمینه $\leftarrow$ در G_f هیچ یالی از S_1 به T_1 وجود ندارد.

(S_2, T_2) برش کمینه $\leftarrow$ در G_f هیچ یالی از S_2 به T_2 وجود ندارد.

اثبات اینکه برش $(S_1 \cap S_2, T_1 \cup T_2)$ کمینه است:

اثبات کردیم که کمینه بودن برش معادل نبودن یال در گراف G_f از $S_1 \cap S_2$ به $T_1 \cup T_2$ هست.

خلف: چنین یالی مثل (u,v) در G_f وجود دارد:

$u \in S_1 \cap S_2 \rightarrow u \in S_1$, $v \in T_1 \cup T_2$ ⟨ or
- $v \in T_1 \longrightarrow (u,v) \in G_f$, (S_1, T_1) is min cut ※
- $u \in S_2$, $v \in T_2 \longrightarrow (u,v) \in G_f$, (S_2, T_2) is min cut ※

اثبات اینکه برش $(S_1 \cup S_2, T_1 \cap T_2)$ کمینه است:

خلف: چنین یالی مثل (u,v) در G_f وجود دارد:

$u \in S_1 \cup S_2$ ⟨ or
- $u \in S_1 \longrightarrow v \in T_1 \cap T_2 \rightarrow v \in T_1 \rightarrow (u,v) \in G_f$, (S_1, T_1) is min cut ※
- $u \in S_2 \longrightarrow v \in T_1 \cap T_2 \rightarrow v \in T_2 \rightarrow (u,v) \in G_f$, (S_2, T_2) is min cut ※