سؤال ۱۳ - تمرین ۴

محمدمهدی فراهانی - ۴۰۰۱۷۰۳۴۱

لم: اگر جفت عدد a و b نسبت به هم اوّل باشند و a^2+b^2 مربّع کامل باشد؛

یعنی $(\exists c \in N \ s.t. \ a^2+b^2=c^2)$. یکی از بین a و b زوج و دیگری فرد است.

اثبات:

(۱) a و b نمی‌توانند هر دو زوج باشند:

چون نسبت به هم اوّل اند $(\gcd(a,b)=1)$ و اگر $a=2q$

و $b=2q'$ باشد؛ $2 \mid \gcd(a,b)$ خواهد بود که خلاف فرض داده شده است.

(۲) a و b نمی‌توانند هر دو فرد باشند،

فرض خلف: $a=2q+1$ و $b=2q'+1$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow a^2 = 4q'^2+4q'+1 \Rightarrow a^2=4k+1 \\ \text{استدلال مشابه} \Rightarrow b^2=4k'+1 \end{array}\right\} \Rightarrow c^2=a^2+b^2=4k''+2$$

ولی اگر c عدد طبیعی باشد؛ باقی ماندهٔ c^2 بر 4 می‌تواند فقط صفر

(اگر c زوج باشد) یا 1 (اگر c فرد باشد؛ همانطور که در مورد a^2 و b^2

دیدیم) پس اثبات می‌شود $c^2=a^2+b^2$ در این حالت مربّع کامل

نیست پس a و b نمی‌توانند هر دو فرد باشند.

طبق ۱ و ۲ نتیجه می گیریم که از بین a و b یکی فرد و یکی زوج خواهد بود.

لم اثبات شد.

الگوریتم اصلی:

همهٔ جفت های (a, b) را بررسی می کنیم؛ $O(n^2)$

شرط اول بودن چک می کنیم (الگوریتم اقلیدس)

suppose $a \geq b$

$$\gcd(a,b) = \gcd(b, a \bmod b) \qquad O(\log b)$$

کامل بودن a^2+b^2 را بررسی می کنیم $O(1)$

در زمان $O(n^2 \log m)$ (m بزرگترین عدد لیست داده شده است)

با اعداد ورودی داده شده، یک گراف می سازیم و بین جفت های خوب که قبل تر پیدا کردیم، یال رسم می کنیم. طبق لم اثبات شده می دانیم گراف دو بخشی است. چون همهٔ یال ها بین رأس های متناظر با اعداد زوج و فرد هستند (عدد فردی را به عددی زوج وصل می کنند) طبق الگوریتم پیدا کردن بیش ترین تطابق به کمک بیش ترین شار (Bipartite Matching : Max flow formulation) در زمان چندجمله ای بزرگترین تطابق را پیدا می کنیم و در صورتی که تعداد تطابق ها برابر $n/2$ باشد خروجی TRUE می دهیم و در غیر این صورت FALSE