هینت : binary search , edmonds karp

سوال ۱۴

برای حل این مسئله از ترکیب جستجوی دودویی روی جواب (Binary Search on Answer) و الگوریتم بیشینه شار (Max Flow) استفاده می‌کنیم.

ایدهٔ اصلی این است که یک مقدار cost را به‌عنوان جواب فرض کنیم. سپس تمام یال‌هایی که هزینه‌شان بیشتر از cost است را حذف می‌کنیم و فقط یال‌های با هزینهٔ حداکثر cost را نگه می‌داریم. بعد روی گراف باقی‌مانده الگوریتم بیشینه‌شار را اجرا می‌کنیم. اگر بتوان حداقل (k) واحد جریان از مبدأ به مقصد فرستاد، یعنی این مقدار cost قابل قبول است؛ در غیر این صورت جواب نیست.

مراحل الگوریتم

1. **ابتدا تمام هزینه‌های متمایز یال‌های گراف را استخراج کرده و به صورت صعودی مرتب می‌کنیم. فرض کنید این مقادیر در آرایه**

$$\boldsymbol{W = [w_1, w_2, \dots, w_m]}$$

قرار گرفته باشند.

2. **روی این آرایه جستجوی دودویی انجام می‌دهیم. در هر مرحله مقدار میانی آرایه را انتخاب می‌کنیم و آن را به عنوان حدس فعلی جواب در نظر می‌گیریم .**
3. **اگر مقدار انتخاب‌شده C باشد، گرافی جدید می‌سازیم که فقط شامل یال‌هایی است که هزینه آن‌ها حداکثر C است. ظرفیت هر یال نیز همان ظرفیت اصلی آن در گراف اولیه خواهد بود .**
4. **سپس روی این گراف یک مسئله بیشینه شار حل می‌کنیم. (ادموندز کارپ)**
5. **حال الگوریتم بیشینه شار را از s به t اجرا می‌کنیم .**
   - **اگر مقدار بیشینه شار بزرگتر مساوی k باشد، یعنی با استفاده از یال‌هایی که هزینه آن‌ها حداکثر C است می‌توان k واحد جریان ارسال کرد. پس C یک جواب معتبر است و سعی می‌کنیم مقدار کوچک‌تری پیدا کنیم؛ بنابراین جستجو را در نیمه چپ ادامه می‌دهیم .**
   - **اگر مقدار بیشینه شار کمتر از k باشد، یال‌های موجود کافی نیستند و باید یال‌های گران‌تری را نیز در نظر بگیریم؛ بنابراین جستجو را در نیمه راست ادامه می‌دهیم .**
6. **در پایان جستجوی دودویی، کوچک‌ترین مقداری که توانسته است ارسال k واحد جریان را ممکن کند، پاسخ نهایی مسئله خواهد بود .**

تحلیل پیچیدگی

مرتب‌سازی هزینه‌های یال‌ها حداکثر

$$\boldsymbol{O(|E| \log |E|)}$$

زمان نیاز دارد.

از طرفی جستجوی دودویی روی حداکثر $|E|$ مقدار مختلف انجام می‌شود، بنابراین تعداد مراحل آن

$$\boldsymbol{O}(\log\ |\boldsymbol{E}|)$$

است.

در هر مرحله یک بار الگوریتم بیشینه شار اجرا می‌شود. اگر از الگوریتم ادموندز-کارپ استفاده کنیم، زمان اجرای آن برابر است با

$$\boldsymbol{O}(|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|^2)$$

بنابراین پیچیدگی کل الگوریتم برابر خواهد بود با:

$$\boldsymbol{O}(|\boldsymbol{E}|\log\ |\boldsymbol{E}|) + \boldsymbol{O}(\log\ |\boldsymbol{E}|) \times \boldsymbol{O}(|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|^2)$$

که در نهایت به صورت

$$\boldsymbol{O}(|\boldsymbol{V}||\boldsymbol{E}|^2 \log\ |\boldsymbol{E}|)$$

نوشته می‌شود.