

گراف دوبخشی زیر را در نظر بگیرید:

$$L = \{a, b\}, \quad R = \{1, 2, 3\},$$

$$E = \{(a, 1), (a, 2), (b, 2), (b, 3)\}.$$

← یال ها

یک برنامه‌ی خطی برای پیدا کردن بزرگ‌ترین تطابق در این گراف بنویسید و مقدار بهینه‌ی آن را پیدا کنید.

بزرگ‌ترین تطابق: کدام یال‌ها را انتخاب کنیم تا تعداد یال‌های انتخاب شده بیشترین مقدار ممکن بشه، با این شرط که هیچ رئی دو بار استفاده نشود

برای هر یال یک متغیر تعریف می‌کنیم که اگر یال انتخاب شود مقدار متغیر برابر یک می‌شود و اگر آن یال انتخاب نشود مقدار متغیر صفر می‌شود

$$E = \{(a, 1), (a, 2), (b, 2), (b, 3)\}$$

$$x_{a_1} \leftarrow (a, 1) \text{ یال}$$

$$x_{a_2} \leftarrow (a, 2) \text{ یال}$$

$$x_{b_2} \leftarrow (b, 2) \text{ یال}$$

$$x_{b_3} \leftarrow (b, 3) \text{ یال}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{اگر } x_{a_1} = 1 : \text{ یعنی یال } (a, 1) \text{ انتخاب شده} \\ \text{اگر } x_{a_1} = 0 : \text{ یعنی یال } (a, 1) \text{ انتخاب نشده} \end{array} \right\}$$

ما می خواهیم تعداد یال های انتخاب شده را بیشینه کنیم.

$$\text{تعداد یال های انتخاب شده} = x_{a_1} + x_{a_2} + x_{b_2} + x_{b_3}$$

تابع هدف:

$$\max Z = x_{a_1} + x_{a_2} + x_{b_2} + x_{b_3}$$

محدودیت: هر رأس باید حداکثر در یک یال انتخاب شده باشد

محدودیت رأس a :

$(a, 1)$ و $(a, 2)$

نی توینم هر دو را با هم انتخاب کنیم:

$$x_{a_1} + x_{a_2} \leq 1$$

محدودیت رأس b :

$(b, 2)$ و $(b, 3)$

نی توینم هر دو را با هم انتخاب کنیم:

$$x_{b_2} + x_{b_3} \leq 1$$

محدودیت رأس 1 :

$(a, 1)$

$$x_{a_1} \leq 1$$

محدودیت راس ۲ :

$(a, 2)$, $(b, 2)$

نی توینم سر دو را با هم انتخاب کنیم :

$$x_{a2} + x_{b2} \leq 1$$

محدودیت راس ۳ :

$(b, 3)$

$$x_{b3} \leq 1$$

برنامه خطی نهایی :

$$\max Z = x_{a1} + x_{a2} + x_{b1} + x_{b2}$$

$$\begin{cases} x_{a1} + x_{a2} \leq 1 & (1) \\ x_{b2} + x_{b3} \leq 1 & (2) \\ x_{a1} \leq 1 \\ x_{a2} + x_{b2} \leq 1 \\ x_{b3} \leq 1 \\ 0 \leq x_{ij} \leq 1 \end{cases}$$

$$(1), (2) \rightarrow x_{a1} + x_{a2} + x_{b2} + x_{b3} \leq 2 \rightarrow Z \leq 2$$

مطابق نامحادی بالا بیشترین تعداد یال ممکن می تواند بیشتر از

۲. سؤور

حالا باید ببینیم آیا می‌توان ۲ یال انتخاب کنیم یا نه.

یال‌های $(a, 1)$ و $(b, 3)$ را انتخاب می‌کنیم

$$M = \{(a, 1), (b, 3)\}$$

$$x_{a_1} = 1$$

$$x_{b_3} = 1$$

$$x_{a_2} = 0$$

$$x_{b_2} = 0$$

$$Z = 1 + 0 + 0 + 1 = 2$$

حالا چون از قبل Z حداکثر برابر ۲ هست و الان جوابی با مقدار Z برابر ۲ پیدا کردیم پس جواب بهینه همین هست

$$\Rightarrow M = \{(a, 1), (b, 3)\} \rightarrow Z = 2$$

جواب نهایی بهینه دیگر:

$$\{(a, 1), (b, 2)\}$$

$$\{(a, 2), (b, 3)\}$$