



دانشکده مهندسی کامپیوتر
طراحی الگوریتم‌ها

نیمسال دوم ۱۴۰۴-۱۴۰۵

دکتر آبام
علی مقدسی

تمرین ششم - سوال ۲۸

سوال ۲۸ — دوگان بازی

برای یک گراف دوبخشی $G = (L \cup R, E)$ برنامه‌ی خطی کمینه‌سازی پوشش رأسی را بنویسید. سپس دوگان آن را حساب کنید و توضیح دهید چرا دوگان، همان برنامه‌ی خطی تطابق است.

گام ۱ — برنامه‌ی خطی برای حداقل vertex cover

برای هر رأس $v \in L \cup R$ یک متغیر $x_v \geq 0$ می‌گذاریم. ایده‌اش این است که $x_v = 1$ یعنی «رأس v را در پوشش می‌گیریم» و $x_v = 0$ یعنی نمی‌گیریم. (در نسخه‌ی صحیح عدد صحیح، $x_v \in \{0, 1\}$ است؛ اینجا relaxation خطی می‌گیریم و $0 \leq x_v \leq 1$ یا فقط $x_v \geq 0$ کافی است، چون در بهینه از ۱ بیشتر نمی‌شود.) برای اینکه مجموعه‌ی انتخاب‌شده واقعاً vertex cover باشد، هر یال باید حداقل یک سرش انتخاب شود:

$$\forall e = \{u, v\} \in E : \quad x_u + x_v \geq 1.$$

هدف هم کمینه‌کردن تعداد (وزن) رأس‌های انتخاب‌شده است:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{v \in L \cup R} x_v \\ \text{s.t.} \quad & x_u + x_v \geq 1 \quad \forall \{u, v\} \in E, \\ & x_v \geq 0 \quad \forall v \in L \cup R. \end{aligned}$$

این همان primal ماست. (در اسلاید weighted vertex cover هم دقیقاً همین فرم را دیدیم؛ این‌جا وزن همه رأس‌ها ۱ است.)

گام ۲ — ساخت دوگان

حالا طبق قواعد دوگانگی LP، دوگان را می‌نویسیم.
قاعده‌ی کلی:
در primal ما:

- تابع هدف از نوع کمینه‌سازی است؛
- هر قید به شکل «مجموع چند متغیر $\geq$ عدد ثابت» است؛

• متغیرها نامنفی اند.

پس در دوگان:

• تابع هدف بیشینه‌سازی می‌شود؛

• برای هر قید یک متغیر دوگان می‌آید؛

• قیود دوگان به شکل « $\geq$ » برعکس می‌شوند و به « $\leq$ » تبدیل می‌شوند.

متغیر دوگان. برای هر یال $e \in E$ یک متغیر $y_e \geq 0$ می‌گذاریم. (چون در primal برای هر یال یک قید $x_u + x_v \geq 1$ داشتیم.)

تابع هدف دوگان. سمت راست قیود primal همه‌شان ۱ است؛ پس هدف دوگان می‌شود:

$$\max \sum_{e \in E} y_e.$$

قیود دوگان. در primal، ضریب هر متغیر x_v در تابع هدف برابر ۱ است. پس برای هر رأس v باید داشته باشیم: «مجموع متغیرهای دوگان مربوط به یال‌هایی که به v می‌رسند، حداکثر ۱ باشد.» یعنی:

$$\forall v \in L \cup R: \sum_{e \ni v} y_e \leq 1.$$

و البته $y_e \geq 0$.

پس دوگان کامل این است:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{e \in E} y_e \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{e \ni v} y_e \leq 1 \quad \forall v \in L \cup R, \\ & y_e \geq 0 \quad \forall e \in E. \end{aligned}$$

گام ۳ — چرا دوگان همان matching است؟

نگاه کنیم این برنامه دقیقاً چه می‌گوید:

۱. متغیر y_e را می‌توانیم «انتخاب شدن یال e در تطابق» تعبیر کنیم. اگر $y_e = 1$ یعنی یال را گرفتیم، اگر $y_e = 0$ یعنی نگرفتیم.

۲. قید $\sum_{e \ni v} y_e \leq 1$ برای هر رأس v یعنی: از بین یال‌هایی که به v وصل‌اند، حداکثر یکی انتخاب شود. این دقیقاً تعریف matching است: هیچ دو یال انتخاب‌شده‌ای سر مشترک ندارند.

۳. تابع هدف $\sum y_e$ هم اندازه تطابق را بیشینه می‌کند.

پس دوگان، دقیقاً برنامه‌ی خطی حداکثر تطابق (maximum matching) است:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{e \in E} y_e \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{e \ni v} y_e \leq 1 \quad \forall v, \\ & y_e \geq 0. \end{aligned}$$

در حالت کلی گراف (غیر دوبخشی)، ممکن است جواب بهینه‌ی این LP ها کسری باشد و با نسخه‌ی صحیح عدد صحیح یکی نباشد. ولی در گراف دوبخشی، به خاطر قضیه‌ی König و خواص چندوجهی تطابق دوبخشی، جواب بهینه‌ی این دو LP صحیح می‌شود و داریم:

$$\text{اندازه‌ی حداکثر matching} = \text{اندازه‌ی حداقل vertex cover}$$

یعنی مقدار بهینه‌ی primal و دوگان برابرند (دوگانگی قوی strong duality) و هر دو با نسخه‌ی ترکیبیاتی مسئله یکی‌اند.

جمع‌بندی یک خطی. primal = حداقل پوشش رأسی (با متغیر روی رأس‌ها)؛ دوگان = حداکثر تطابق (با متغیر روی یال‌ها)؛ و در گراف دوبخشی این دو مقدار برابرند.

□